TALENTE.
CAMPUS.
HERNSTEIN

SCI.E.S.COM

Vorstellung

Sebastian Miksch, BSc

Astrophysiker und Trainer bei
SCI.E.S.COM | TALENTE.CAMPUS.HERNSTEIN

Folgen und Reihen

Was ist eine Folge?

- Eine Abfolge von durchnummerierten Elementen, die nicht vertauschbar sind
- Beispiel:
- $2, 5, 7, 10$
- $a_1 = 2$
- $a_2 = 5$
- $a_3 = 7$
- $a_4 = 10$

Was ist eine Folge?

- $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$
- Die Nummerierung der einzelnen Elemente erfolgt im Index
- $a_i,\ i = 1,2,3,4, \ldots n$
- Bei Folge $2, 5, 7, 10$
- $a_i,\ i = 1,2,3,4$
- a_i verweist auf den Platz einer Zahl in der Folge

Folgen darstellen

- $2, 4, 6, 8, \dots$
- $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$
- Zwei mögliche Darstellungen:
- $a_i = 2 * i$
- $a_1 = 2 * 1,\ a_2 = 2 * 2,\ a_3 = 2 * 3, a_4 = 2 * 4, \dots$

- $a_{i+1} = a_i + 2$
- $a_1 = 2,\ a_{1+1} = 2 + 2,\ a_{2+1} = 4 + 2,\ a_{3+1} = 6 + 2$

Folgen darstellen

- $a_i = \frac{1}{i+2} = \left(\frac{1}{1+2}, \frac{1}{2+2}, \frac{1}{3+2}, \dots\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

Frage

- Welchen Wert hat a_3 in dieser Folge:
- 5, 15, 20, 25, 30, 35, …
- Antworten
- 15
- 20
- 25

Frage

- Frage:
- $a_i = 3 * i = ?$
- Antworten:
- $(3, 9, 27,81, \dots)$
- $(3, 6, 9,12, \dots)$
- $(3, 6, 9,11, \dots)$

Wie sehen Folgen aus?

- Folgen sind immer Abfolgen von Zahlen, bei denen die Abfolge festgelegt ist
- Beispiele für Folgen:
- $(3, 9, 27, \dots), (5, -3, 10,)(-1, 1, -1,1, \dots)$

Was ist eine Reihe?

- $2 + 5 + 7 + 10 = 24$
- $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 24$
- $\sum_{i=1}^{4} a_i = 24$

Arithmetische Reihen

- Arithmetisch:
- $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
- $\sum_{i=0}^{5} a_i = 2i + 1$
- Der Abstand zwischen den einzelnen Gliedern der Reihe bleibt gleich

Geometrische Reihen

- $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$
- Der Abstand zwischen den einzelnen Elementen variiert.
- Gleich bleibt ein multiplikativer Faktor.
- $2 + 2 * 2 + 2 * 2 * 2 + 2 * 2 * 2 * 2 + 2 * 2 * 2 * 2 * 2 =$
- $2 + 2 * 2 + 2 * 4 + 2 * 8 + 2 * 16$
- $\sum_{i=0}^{5} 2^i$
- $\sum_{i=0}^{5} q^i \,, q = 2$

Grenzwerte

- Nicht alle Reihen sind begrenzt:
- $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ \ldots = \infty$

Fibonacci-Folge

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$
- $1 + 1 = 2$
- $1 + 2 = 3$
- $2 + 3 = 5$
- $3 + 5 = 8$
- $5 + 8 = 13$
- $\vdots$

Potenzieren

- $a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n}$
- $a^2 = a * a$
- $a^3 = a * a * a$

- $2^2 = 2 * 2 = 4$
- $2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$
- $4^3 = 4 * 4 * 4 = 64$

Fibonacci potenzieren

- $1, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ 5, \ 8, \ \ 13, \ \ \ 21, \ \ \ \ 34, \ \ \ \ 55, \ldots$
- $1, \ \underbrace{1, \ 4}_{5}, \ \ 9, 25, 64, 169, \ 441, \ 1156, \ 3025, \ldots$
- $1, \ 1, \ \underbrace{4, \ 9}_{13}, 25, 64, 169, \ 441, \ 1156, \ 3025, \ldots$
- $1, \ 1, \ 4, \underbrace{9, \ \ 25}_{34}, 64, 169, \ 441, \ 1156, \ 3025, \ldots$

Fibonacci potenzieren

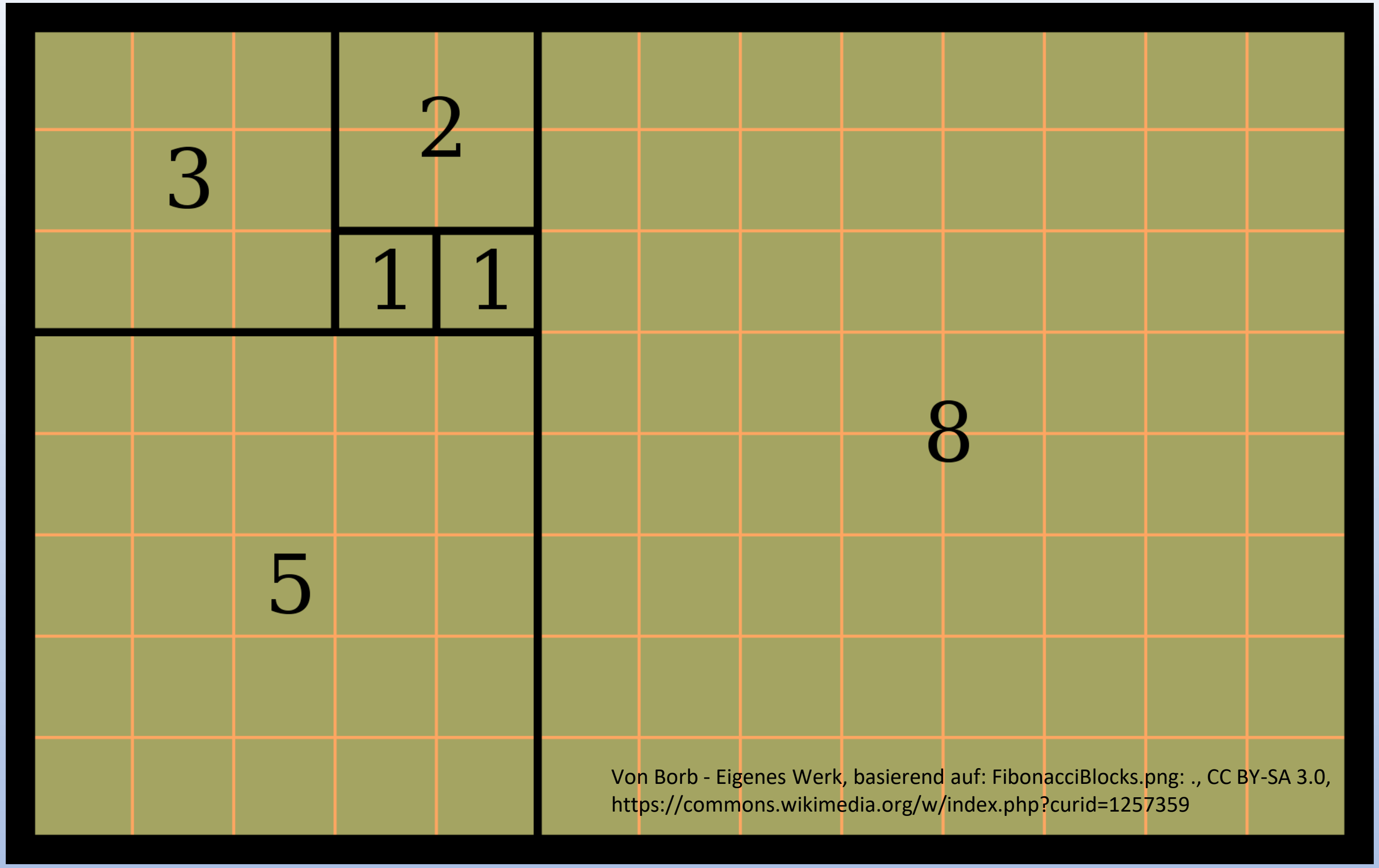
- $1, \ 1, \ 2, \ 3, \quad 5, \ 8, \quad 13, \quad 21, \qquad 34, \qquad 55, \dots$
- $1, \ 1, \ 4, \ 9, 25, 64, 169, \ 441, \ 1156, \ 3025, \dots$

- $1 + 1 + 4 = 6$
- $1 + 1 + 4 + 9 = 15$
- $1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40$
- $1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104$

Fibonacci potenzieren

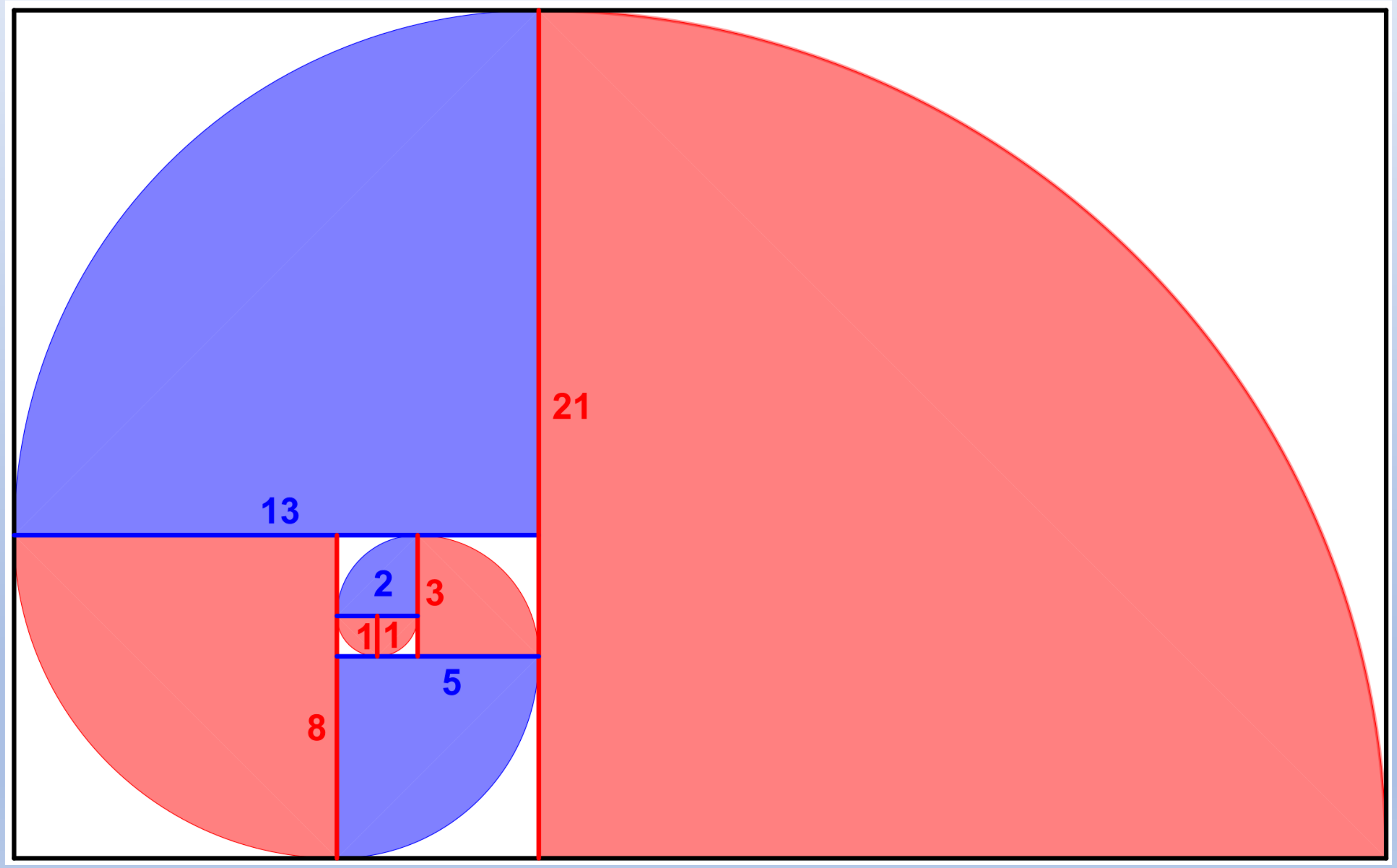
- $1, \ 1, \ 2, \ 3, \quad 5, \ 8, \ \ 13, \quad 21, \qquad 34, \qquad 55, \dots$
- $1, \ 1, \ 4, \ 9, 25, 64, 169, \ 441, \ 1156, \ 3025, \dots$

- $1 + 1 + 4 = 6 \qquad = 2 * 3$
- $1 + 1 + 4 + 9 = 15 \qquad = 3 * 5$
- $1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40 \qquad = 5 * 8$
- $1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104 \qquad = 8 * 13$



- $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 * (8 + 5) = 8 * 13$

Fibonacci Spirale

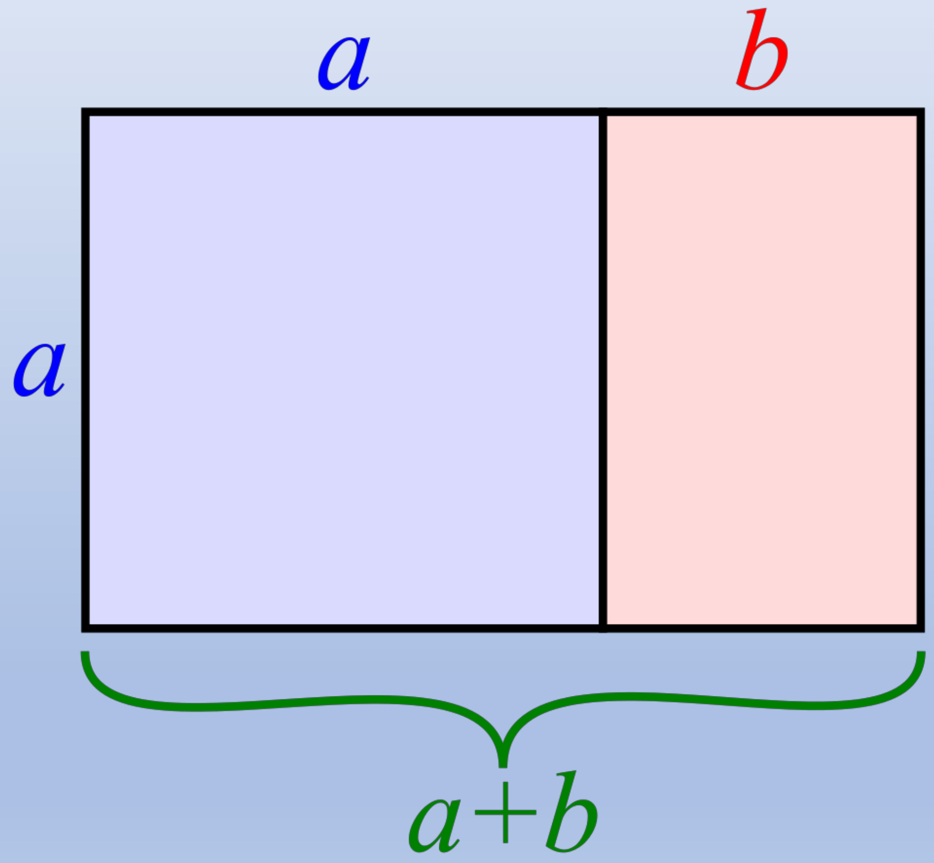


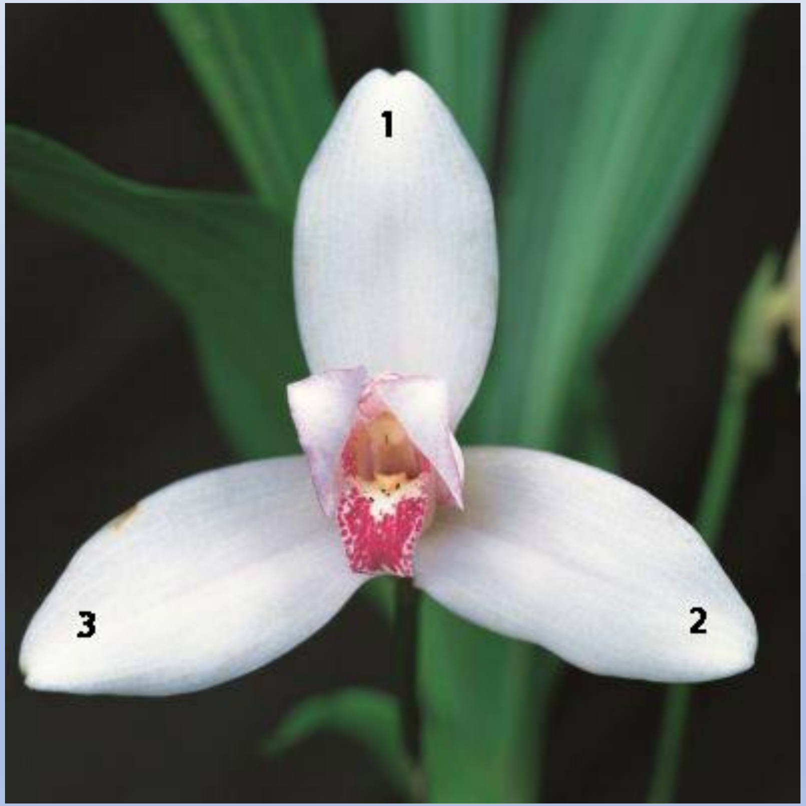
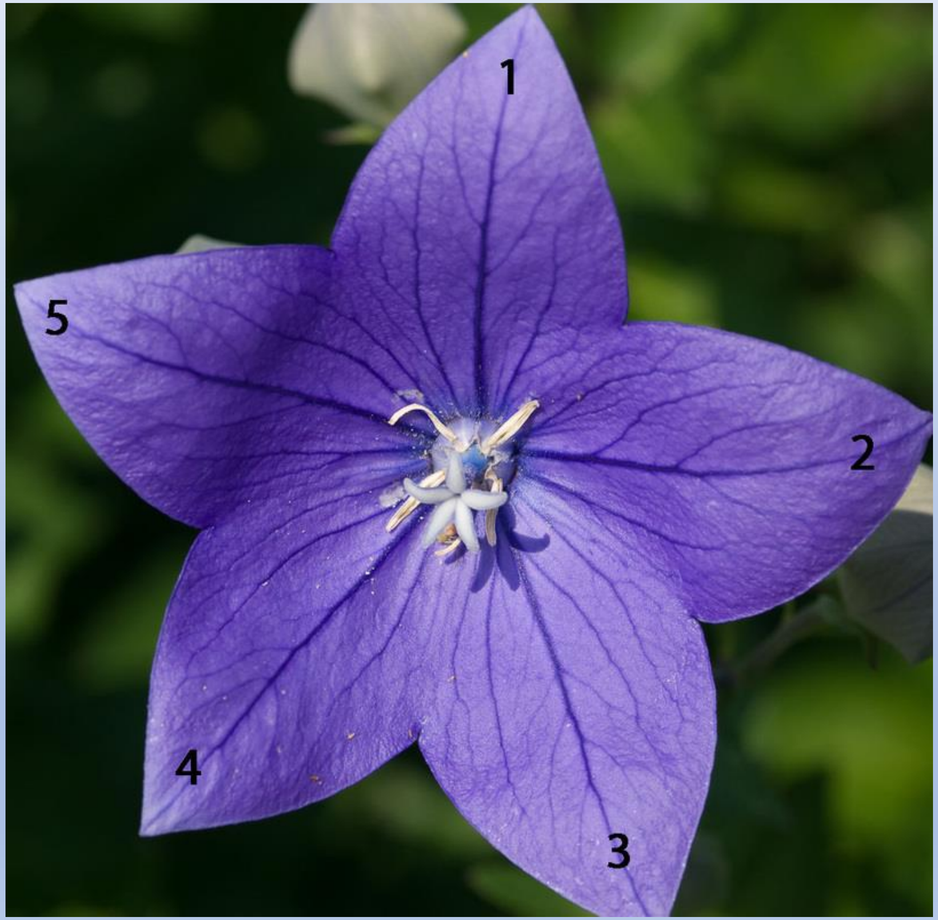
Fibonacci potenzieren

- $8 * 13$
- $13 * 21$
- $21 * 34$
- $34 * 55$

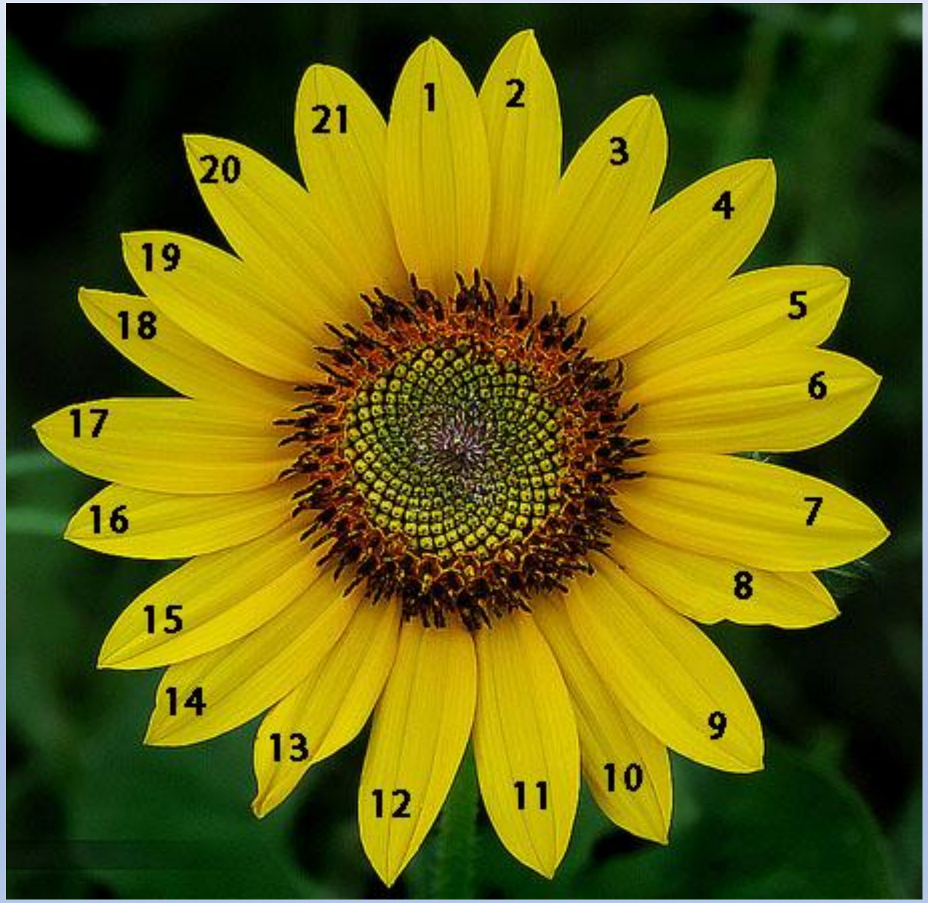
- $13: 8 = 1,625$
- $21: 13 = 1,615 \ldots$
- $34: 21 = 1,619 \ldots$
- $55: 34 = 1,6176 \ldots$
- $\vdots$
- $\Phi = 1,618033 \ldots$

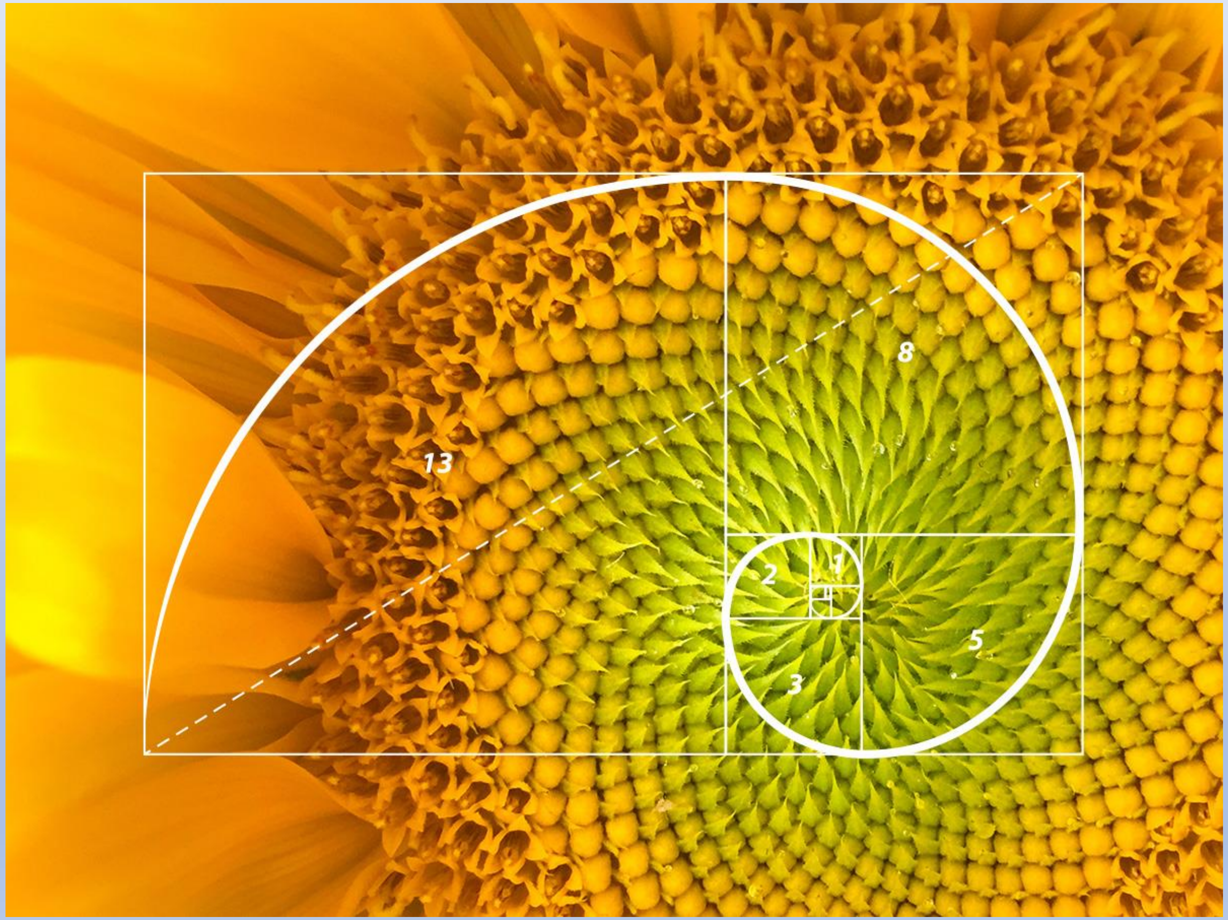
Der goldene Schnitt




1
2
3

1
2
3
4
5


1
2
3
4
5
6
7
8


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

13
8
2
1
3
5

Was ist eine Primzahl?

Was ist eine Primzahl?

- Eine Primzahl ist eine Zahl die nur durch 1 und durch sich selbst ohne Rest teilbar ist
- Eine Primzahl ist immer eine natürliche Zahl
- 0 und 1 sind keine Primzahl

Dividieren

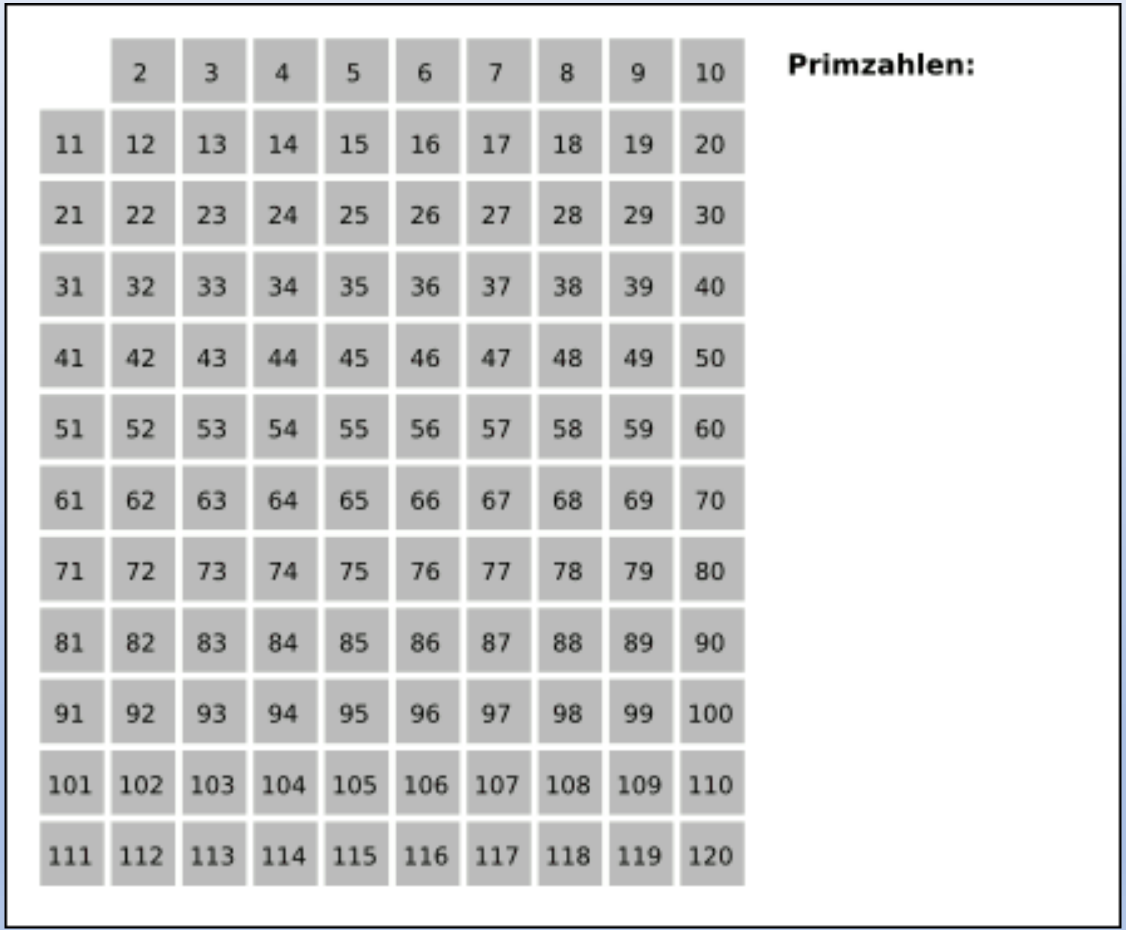
$$10:3 = 3.3$$

$$\begin{array}{l} -\ \ 9 \\ \quad 10 \\ \qquad 1 \end{array}$$

Testen wir ein paar Zahlen

- 2: $2:2 = 1 \qquad Rest = 0$
- 3: $3:2 = 1 \qquad Rest = 1$
- 3: $3:3 = 1 \qquad Rest = 0$
- 4: $4:2 = 1 \qquad Rest = 0$

Sieb des Eratosthenes



Von SKopp in der Wikipedia auf Deutsch - Eigenes Werktransferred from German Wikipedia, original file was located at de:Bild:Animation Sieb des Eratosthenes.gif, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=327783

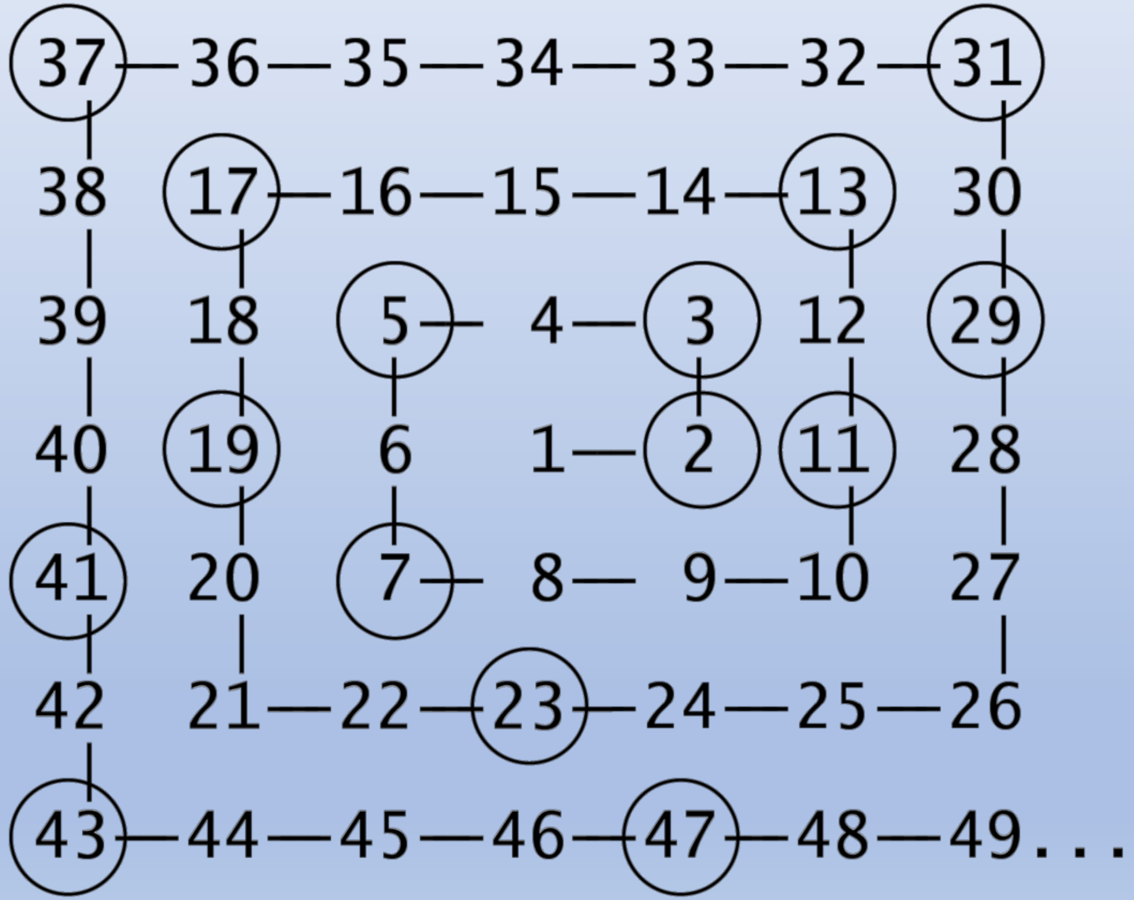
Sieb des Eratosthenes

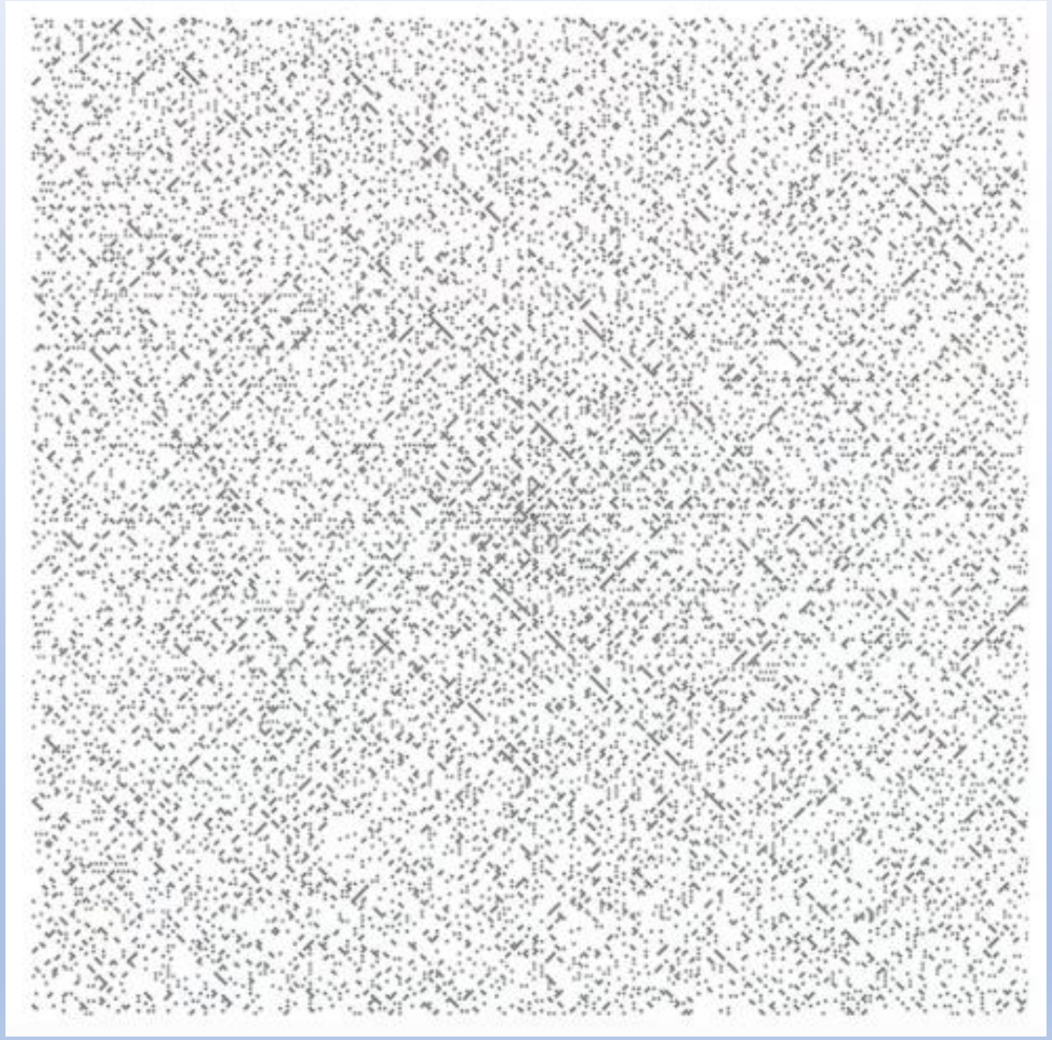
- Schreibe die Zahlen von 2 bis 10 in eine Reihe
- In die zweite Reihe schreibst du die Zahlen von 11 bis 20
- Usw.
- Nun überprüfst du welche Zahlen sich durch keine anderen ganzzahlig teilen lassen
- Die erste derartige Zahl ist 2. Nun kannst du alle Zahlen, die durch 2 teilbar sind herausstreichen
- Die zweitet Zahl ist 3. Nun kannst du alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind herausstreichen
- 4 ist durch 2 teilbar. Du brauchst sie nicht zu beachten

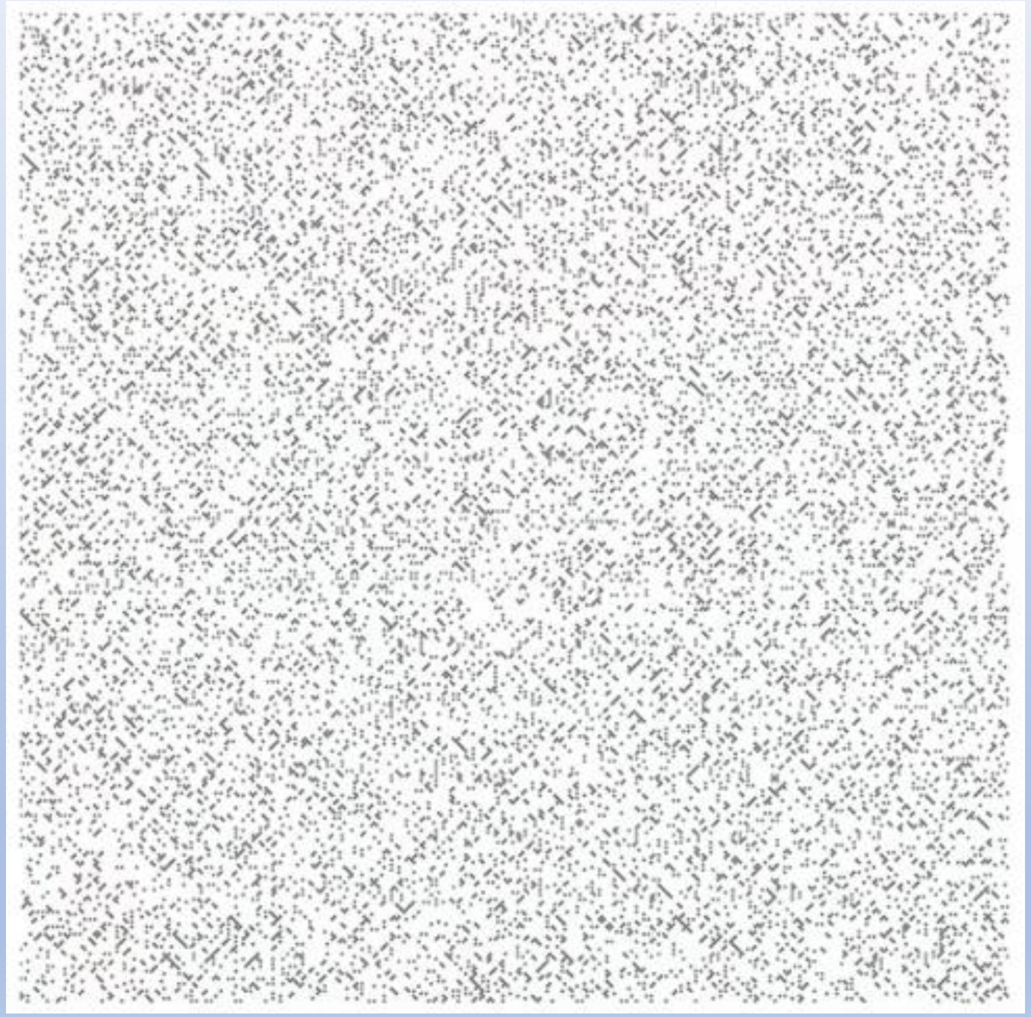
Warum sind 0 und 1 keine Primzahlen?

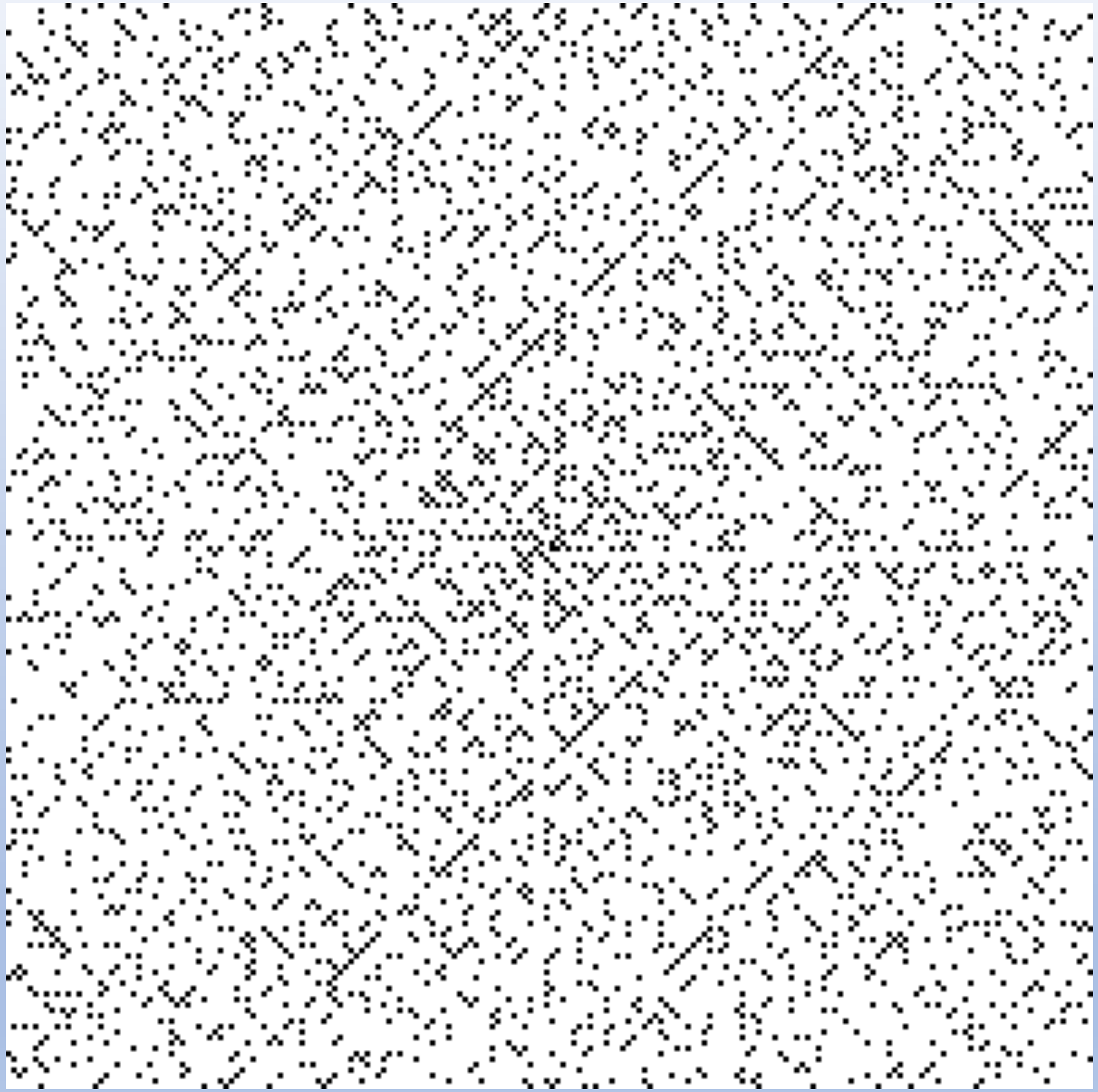
- 0 ist zwar durch 1 teilbar, allerdings kann nicht durch 0 dividiert werden. Somit kann 0 keine Primzahl sein
- 1 ist durch sich selbst teilbar, hat allerdings nur einen Teiler, im Gegensatz zu allen anderen Primzahlen
- Die Primfaktorzerlegung mit 1 ist nicht eindeutig

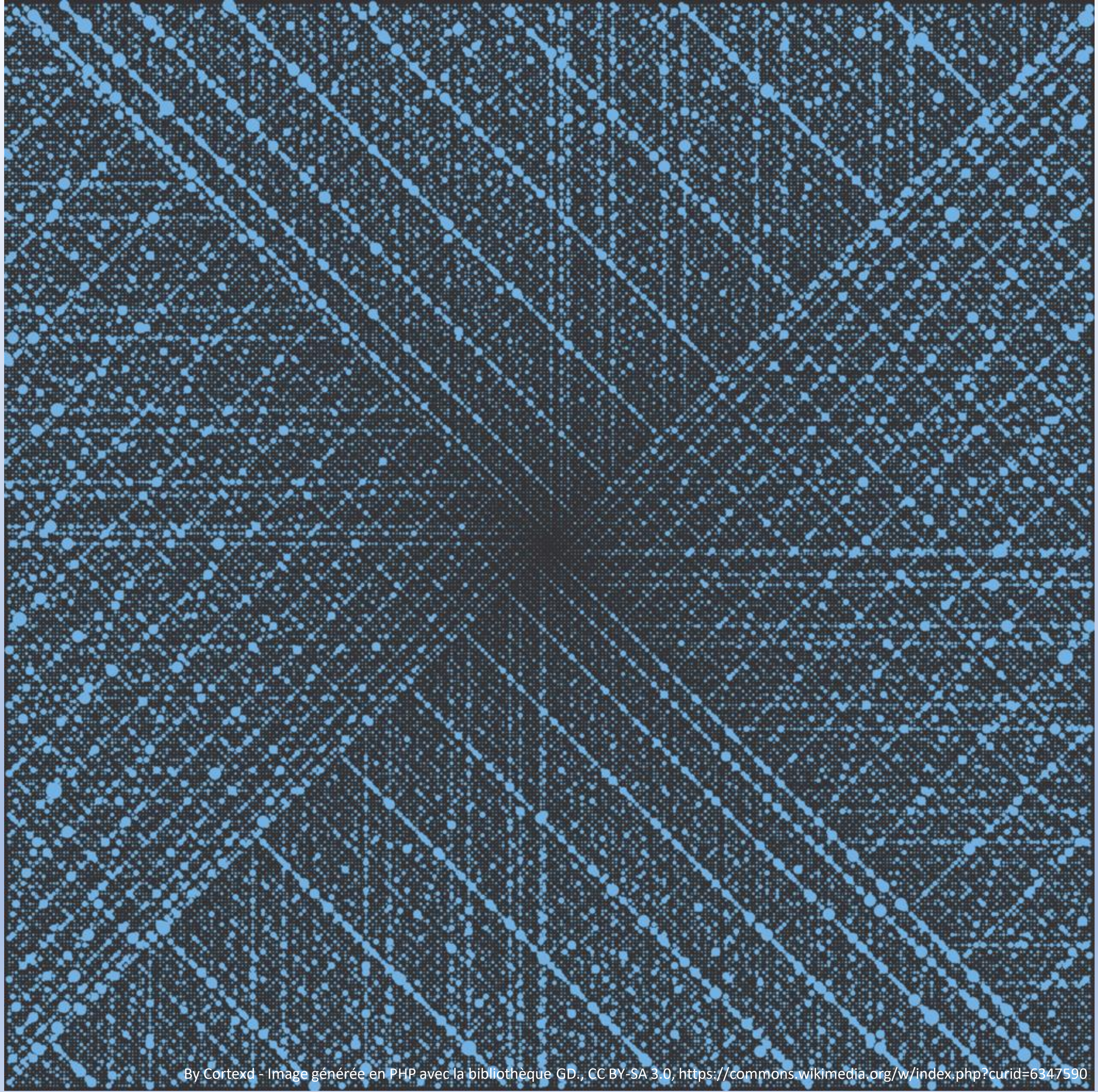
Ulam Spirale











Gibt es eine größte Primzahl?

- Es gibt immer eine „amtierende“ größte Primzahl
- Im Moment ist die größte Primzahl $2^{82.589.933} - 1$
- Sie besteht aus 24.862.048 aneinandergereihten Ziffern
- 148894445742041325547806458472397916603026273992795324185271289425213239361064475310309971132180337174752834401423587560 ... (Es fehlen 24.861.808 Stellen)
- Bei dieser Zahl handelt es sich um eine Mersenne-Zahl

Satz von Euklid

- Für jede gedachte Primzahl gibt es immer eine noch größere Primzahl
- Es gibt also unendlich viele Primzahlen
- Konkret:
  - Wir kennen 3 Primzahlen: 2, 3, 5
  - Wir können einfach eine neue Primzahl finden indem wir alle bisherigen Primzahlen multiplizieren und 1 addieren:
  - $2 * 3 * 5 + 1 = 30 + 1 = 31$
  - 31 ist eine Primzahl, die größer als alle drei vorherigen ist

Mersenne – Zahlen

- Mersenne – Zahlen haben die Form $2^n - 1$
- Was heißt das?
- Das n steht für eine beliebige Zahl, also 1, 2, 3, 4,…
- Diese Zahlen kann man einsetzen
- Beispiel: n = 2: $2^2 - 1 = 2 * 2 - 1 = 4 - 1 = 3$
- Beispiel: n = 3: $2^3 - 1 = 2 * 2 * 2 - 1 = 8 - 1 = 7$
- Beispiel: n = 4: $2^4 - 1 = 2 * 2 * 2 * 2 - 1 = 16 - 1 = 15$
- Beispiel: n = 5: $2^5 - 1 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 - 1 = 32 - 1 = 31$

Mersenne – Zahlen

- Mersenne – Zahlen werden verwendet um die größten Primzahlen zu finden
- Die derzeit größte Primzahl ist eine Mersenne – Zahl
- Insgesamt gibt es bis jetzt (2020) 51 Mersenne – Primzahlen

Mersenne - Primzahlen

- Um diese Primzahlen zu finden werden bereits bekannte Primzahlen in den Exponenten geschrieben:
- $2^2 - 1 = ..$
- $2^3 - 1 = ..$
- $2^5 - 1 = ..$
- $2^7 - 1 = ..$
- $2^{11} - 1 = ..$
- $2^{13} - 1 = ..$

Lösung

- $2^2 - 1 = 3$
- $2^3 - 1 = 7$
- $2^5 - 1 = 31$
- $2^7 - 1 = 127$
- $2^{11} - 1 = 2047 = 23 * 89$
- $2^{13} - 1 = 8191$

Primfaktorzerlegung

- Jede Zahl größer als 1 ist entweder eine unzerlegbare Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl
- Jede Zahl, die keine Primzahl ist, kann als Produkt mehrerer Primzahlen dargestellt werden
- Bsp: $6 = 3 * 2 = 2 * 3$
- Sowohl 3 als auch 2 sind Primzahlen

Primfaktorzerlegung

- Wir zerlegen 210:

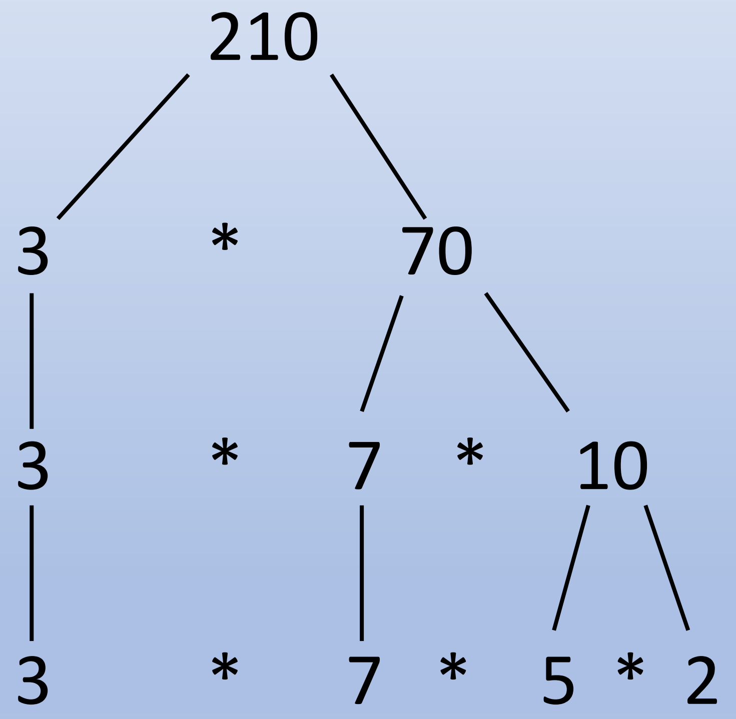
210

21 * 10

3 * 7 * 2 * 5

Primfaktorzerlegung

- Wir zerlegen 210:



Teilerfremdheit

- Zwei natürliche Zahlen sind teilerfremd, wenn sie keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben
- Bsp.: 5 und 7 sind teilerfremd
- Bsp.: 3 und 6 sind nicht teilerfremd, da beide durch 3 und 1 teilbar sind

Kryptographie

- Es ist sehr schwierig die einzelnen Faktoren von Nicht-Primzahlen ausfindig zu machen:
- $30 = 2 * 3 * 5$
- $5040 = 2^4 * 3^2 * 5 * 7$
- Je größer die Zahl ist, desto schwieriger ist es die Faktoren zu finden

5040

5040 – die Antiprimzahl

- **Faktoren**: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 , 14, 15, 46, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180, 210, 240, 252, 280, 315, 336, 360, 420, 504, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 1680, 2520, 5040
- Insgesamt 60 Teiler
- Richtiger Name: Hochzusammengesetzte Zahl
- Mehr Faktoren als alle kleinere Zahlen

Hochzusammengesetzte Zahlen

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl Teiler	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

Links

- Fibonacci:
- https://gotec.io/wissenschaft/umwelt-energie/mutter-naturs-liebste-zahlenfolge-die-fibonacci-folge
- https://www.natuerlich-online.ch/magazin/ausgabe/der-fibonacci-code/
- https://www.youtube.com/watch?v=R8w4l3f3g58 (bis 5:58, danach Spekulation und Falschinformation, davor aber sehr gut)
- Primzahlen:
- https://de.bettermarks.com/mathe/primzahlen-kennenlernen/
- https://www.sofatutor.at/mathematik/zahlen-rechnen-und-groessen/teilbarkeit-und-mengen/primzahlen
- https://www.youtube.com/watch?v=HUHg286m62I